Примерный государственный университет

Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЁТНАЯ РАБОТА
по дисциплине «Сопротивление материалов»

Тема: «Растяжение и сжатие стального ступенчатого стержня: продольные силы, напряжения, проверка прочности, удлинение»

Выполнил: студент 2 курса группы ТМ-21
Иванов Иван Иванович

Проверил: доцент Петров П. П.

Санкт-Петербург
2026

Задача. Расчёт ступенчатого стержня на растяжение-сжатие (вариант 3)

Стальной ступенчатый стержень жёстко заделан верхним концом, нижний конец свободен. Участки нумеруются от свободного нижнего конца к заделке. Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Требуется построить эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ, проверить прочность стержня и найти его полное удлинение. Растягивающую продольную силу и напряжение растяжения считаем положительными.

Геометрия участков:

– участок 1: $l_1 = 0{,}3$ м, $A_1 = 6$ см^2;

– участок 2: $l_2 = 0{,}4$ м, $A_2 = 6$ см^2;

– участок 3: $l_3 = 0{,}5$ м, $A_3 = 10$ см^2, примыкает к заделке.

Нагрузки:

– $P_1 = 30$ кН приложена на свободном конце и направлена вниз, то есть растягивает стержень;

– $P_2 = 50$ кН приложена на границе участков 1 и 2 и направлена вверх;

– $P_3 = 40$ кН приложена на границе участков 2 и 3 и направлена вниз.

Расчётная схема стержня с нумерацией участков и направлениями сил показана на рисунке (рисунок 1). Начало координаты z взято на свободном конце, ось направлена вверх, к заделке.

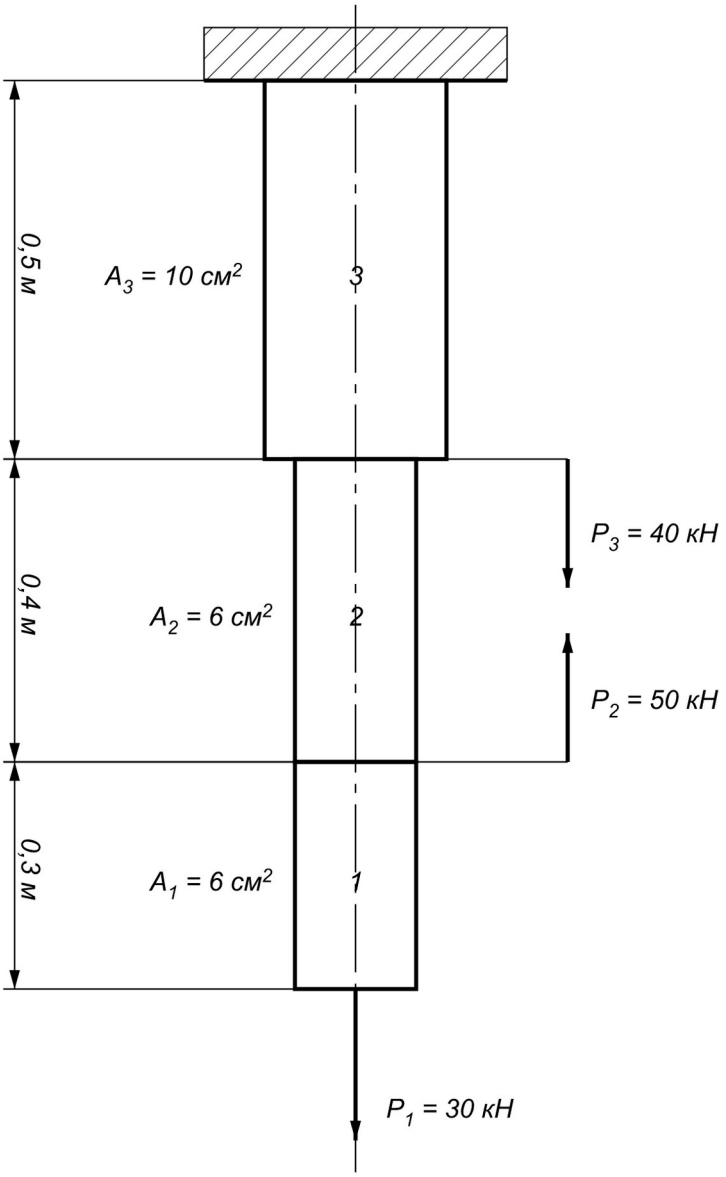


Рисунок 1 – Расчётная схема ступенчатого стержня

1. Продольные силы. Используем метод сечений. На каждом участке проводим сечение и рассматриваем нижнюю отсечённую часть: в неё не попадает заделка, поэтому реакцию опоры определять не требуется. Внешняя сила, направленная вниз, то есть от сечения, растягивает отсечённую часть и входит в сумму со знаком «+», сила, направленная вверх, — со знаком «−».

$$N_1 = P_1 = +30 \text{ кН}$$

$$N_2 = P_1 - P_2 = 30 - 50 = -20 \text{ кН}$$

$$N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 30 - 50 + 40 = +20 \text{ кН}$$

Участки 1 и 3 растянуты, участок 2 сжат.

2. Нормальные напряжения. Напряжение на участке равно σ = N / A. Если сила подставляется в кН, а площадь в см², то для получения результата в МПа числитель умножается на 10^3, знаменатель — на $10^{2.}$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = +50{,}00 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-20 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^2} = -33{,}33 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = +20{,}00 \text{ МПа}$$

Результаты расчёта по участкам сведены в таблицу (таблица 1). В столбце P указана сила, приложенная на нижней границе участка (знак «+» — вниз, «−» — вверх), [σ]/|σ| — запас по напряжениям, Δl — удлинение участка, ΣΔl — нарастающая сумма удлинений от свободного конца.

Таблица 1 – Продольные силы, напряжения и удлинения по участкам

Уч.	l, м	A, см²	P, кН	N, кН	σ, МПа	[σ]/|σ|	Δl, мм	ΣΔl, мм
1	0,3	6	30	30	50,00	3,20	0,0750	0,0750
2	0,4	6	−50	−20	−33,33	4,80	−0,0667	0,0083
3	0,5	10	40	20	20,00	8,00	0,0500	0,0583

Для построения эпюр значения N и σ отложены по длине стержня. Координаты характерных точек приведены в таблице (таблица 2): в каждой точке смены участка даны значения слева и справа от границы, а нулевые точки на концах замыкают эпюры.

Таблица 2 – Координаты точек эпюр N и σ

z, м	Участок	N, кН	σ, МПа
0	1	0	0,00
0	1	30	50,00
0,3	1	30	50,00
0,3	2	−20	−33,33
0,7	2	−20	−33,33
0,7	3	20	20,00
1,2	3	20	20,00
1,2	3	0	0,00

Эпюры продольных сил и нормальных напряжений показаны на рисунке (рисунок 2). На эпюре N скачки расположены в сечениях z = 0,3 м и z = 0,7 м, где приложены силы P_2 и P_3, и по величине равны этим силам: 50 кН и 40 кН. Это подтверждает правильность построения. На эпюре σ в сечении z = 0,7 м скачок вызван одновременно силой P_3 и изменением площади сечения.

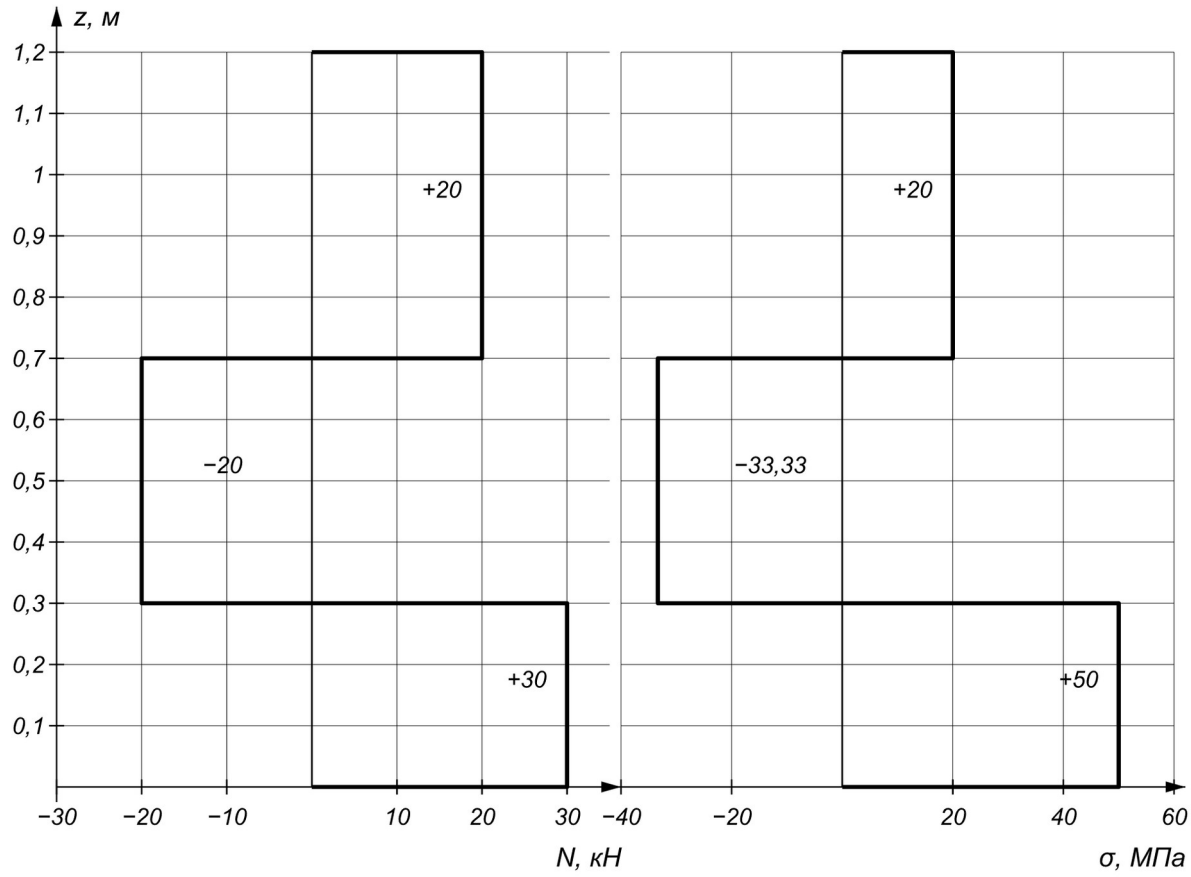


Рисунок 2 – Эпюры продольных сил N и нормальных напряжений σ (z — расстояние от свободного конца)

3. Проверка прочности. Условие прочности при растяжении-сжатии: $\sigma_{max} = |N / A|_{max} \le [\sigma]$. Наибольшее по модулю напряжение действует на участке 1.

$$\sigma_{max} = |\sigma_{1|} = 50 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$n_1 = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}} = \frac{160}{50} = 3{,}2$$

На участках 2 и 3 запас по напряжениям ещё больше и составляет 4,8 и 8,0 соответственно (таблица 1).

Вывод: условие прочности выполняется на всех участках, прочность стержня обеспечена.

4. Удлинения участков. По закону Гука удлинение участка равно $\Delta l_i = N_i \cdot l_i / (E \cdot A_i)$. Силу подставляем в Н, длину в мм, площадь в мм^2, модуль упругости в МПа, тогда удлинение получается в мм.

$$\Delta l_1 = N_1 \cdot \frac{l_1}{E \cdot A_1} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 300}{2 \cdot 10^5 \cdot 600} = +0{,}0750 \text{ мм}$$

$$\Delta l_2 = N_2 \cdot \frac{l_2}{E \cdot A_2} = \frac{-20 \cdot 10^3 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 600} = -0{,}0667 \text{ мм}$$

$$\Delta l_3 = N_3 \cdot \frac{l_3}{E \cdot A_3} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 500}{2 \cdot 10^5 \cdot 1000} = +0{,}0500 \text{ мм}$$

Участок 2 укорачивается, участки 1 и 3 удлиняются. Полное удлинение стержня равно сумме удлинений участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}0750 - 0{,}0667 + 0{,}0500 = 0{,}0583 \text{ мм}$$

Нарастающая сумма в последнем столбце таблицы (таблица 1) показывает перемещения границ участков относительно заделки в обратном порядке: свободный конец смещается вниз на 0,0583 мм.

Ответ:

– продольные силы: $N_1 = +30$ кН, $N_2 = -20$ кН, $N_3 = +20$ кН;

– нормальные напряжения: $\sigma_1 = +50$ МПа, $\sigma_2 = -33{,}33$ МПа, $\sigma_3 = +20$ МПа;

– $\sigma_{max} = 50$ МПа $\le [\sigma] = 160$ МПа, прочность обеспечена;

– полное удлинение стержня $\Delta l \approx 0{,}058$ мм: стержень в целом удлиняется, хотя участок 2 сжат.